ВЫХОДИТ РАЗ В ДВЕ НЕДЕЛИ

Рекомендуемая розничная цена: 279 руб.
Розничная цена: 49,90 грн, 39 900 бел. руб., 990 тенге

занимательные ГОЛОВОЛОМКИ

КОЛЛЕКЦИЯ ЛОГИЧЕСКИХ ИГР ОТ DeAGOSTINI

50

Китайские кольца

ISSN 2225-1782
00050
9 772225 178772

DeAGOSTINI

«ЗАНИМАТЕЛЬНЫЕ ГОЛОВОЛОМКИ»
Издание выходит раз в две недели
Выпуск № 50, 2013
РОССИЯ

ИЗДАТЕЛЬ, УЧРЕДИТЕЛЬ, РЕДАКЦИЯ:
ООО «Де Агостини», Россия
ЮРИДИЧЕСКИЙ АДРЕС: 105 066, г. Москва,
ул. Александра Лукьянова, д.3, стр.1
Письма читателей по данному адресу не принимаются.
ГЕНЕРАЛЬНЫЙ ДИРЕКТОР: Николаос Скилакис
ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР: Анастасия Жаркова
ВЫПУСКАЮЩИЙ РЕДАКТОР: Варвара Степановская
ФИНАНСОВЫЙ ДИРЕКТОР: Наталия Василенко
КОММЕРЧЕСКИЙ ДИРЕКТОР: Александр Якутов
МЕНЕДЖЕР ПО МАРКЕТИНГУ: Михаил Ткачук
МЛАДШИЙ МЕНЕДЖЕР ПО ПРОДУКТУ:
Любовь Мартынова

Уважаемые читатели! Для вашего удобства рекомендуем приобретать выпуски в одном и том же киоске и заранее сообщать продавцу о вашем желании покупать следующие выпуски коллекции.

Свидетельство о регистрации средства массовой информации в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор) ПИ №ФС77-43310 от 28.12.2010 г.

Для заказа пропущенных номеров
и по всем вопросам, касающимся информации о коллекции, заходите на сайт
www.deagostini.ru
По остальным вопросам обращайтесь по телефону бесплатной «горячей линии» в России:
8-800-200-02-01
Телефон «горячей линии» для читателей Москвы:
8-495-660-02-02
АДРЕС ДЛЯ ПИСЕМ ЧИТАТЕЛЕЙ:
Россия, 105066, г. Москва, а/я 13, «Де Агостини», «Занимательные головоломки»
РАСПРОСТРАНЕНИЕ:
ООО «Бурда Дистрибьюшен Сервисиз»

УКРАИНА
ИЗДАТЕЛЬ И УЧРЕДИТЕЛЬ:
ООО "Де Агостини Паблишинг", Украина
ЮРИДИЧЕСКИЙ АДРЕС: 01032, Украина,
г. Киев, ул. Саксаганского, д. 119
ГЕНЕРАЛЬНЫЙ ДИРЕКТОР: Екатерина Клименко
Свидетельство о государственной регистрации печатного СМИ Министерства юстиции Украины КВ № 17502-6252Р от 01.03.2011
АДРЕС ДЛЯ ПИСЕМ ЧИТАТЕЛЕЙ:
Украина, 01033, г. Киев, а/я "Де Агостини", «Занимательные головоломки»
Україна, 01033, м. Київ, а/с "Де Агостіні"
Для заказа пропущенных номеров
и по всем вопросам, касающимся информации о коллекции, заходите на сайт
www.deagostini.ua
По остальным вопросам обращайтесь по телефону бесплатной «горячей линии» в Украине:
0-800-500-8-40

БЕЛАРУСЬ
ИМПОРТЕР И ДИСТРИБЬЮТОР В РБ: ООО «Росчерк», 220037, г. Минск, ул. Авангардная, д. 48а, литер 8/к, тел./факс: +375 17 331-94-27.
Телефон «горячей линии» в Беларуси:
+375 17 279-87-87 (пн-пт, 9.00 – 21.00)
АДРЕС ДЛЯ ПИСЕМ ЧИТАТЕЛЕЙ: Республика Беларусь, 220040, г. Минск, а/я 224, ООО «Росчерк», «Де Агостини», «Занимательные головоломки»

КАЗАХСТАН
РАСПРОСТРАНЕНИЕ: ТОО «КГП «Бурда-Алатау-Пресс»
РЕКОМЕНДУЕМАЯ РОЗНИЧНАЯ ЦЕНА: 279 руб.
РОЗНИЧНАЯ ЦЕНА: 49,90 грн, 39 900 бел. руб., 990 тенге
ОТПЕЧАТАНО В ТИПОГРАФИИ: ООО «Компания Юнивест Маркетинг», 08500, Украина, Киевская область, г. Фастов, ул. Полиграфическая, 10
ТИРАЖ: 68 000 экз.
Издатель оставляет за собой право изменять последовательность номеров и их содержание.
Издатель оставляет за собой право увеличить рекомендуемую цену выпусков.
Неотъемлемой частью каждого выпуска является приложение.

ISSN 2225-1782
ДАТА ВЫХОДА В РОССИИ: 31.12.2013

занимательные ГОЛОВОЛОМКИ

КОЛЛЕКЦИЯ ЛОГИЧЕСКИХ ИГР ОТ DeAGOSTINI

В этом выпуске:

Математическая вселенная

Фундаментальные средства решения задач Важнейшую роль при решении систем линейных уравнений играют определители. Необходимые условия совместности систем линейных уравнений подразумевают определенные отношения между их коэффициентами. На основе этих отношений было введено понятие определителя. Позднее эти коэффициенты стали записываться в виде строк и столбцов; так появились матрицы. Затем и матрицы, и определители превратились в фундаментальные элементы математического анализа.

Блистательные умы

Универсальный математик Среди трудов Карла Густава Якоба Якоби, охватывающих почти все разделы математики, следует выделить важные работы по теории чисел, а также продолжение работ Эйлера, посвященных задаче трех тел. Однако наиболее выдающиеся результаты Якоби связаны с эллиптическими функциями. Они во многом совпали с результатами шведского математика Абеля, однако были получены совершенно независимо от него. Другим математическим «хитом» Якоби стало систематическое изучение определителей.

Математика на каждый день

Как изобразить криволинейную поверхность на плоскости Картография — наука, сочетающая в себе оптику, геологию, астрономию и в особенности математику. Существует простой способ превратить земной шар в бесконечную плоскость. Возьмем сферическую модель земли и положим ее на стол. Если мы хотим определить, в какой точке стола будет располагаться конкретный город, нужно соединить Северный полюс и нужный нам город прямой линией. Точка, в которой эта прямая пересечет плоскость стола, определит положение города на карте.

Математические задачки

Задачи с лоскутами Некая дама захотела разрезать квадратный кусок ткани на четыре части так, чтобы из двух частей получилось одеяло в форме идеального квадрата, а из двух оставшихся — еще одно квадратное одеяло. Сегодня мы решаем эту задачу Генри Э. Дьюдени, а еще составляем два креста из одного, превращаем крест в треугольник, складываем крест и кроим квадратную шаль с минимальным количеством отходов.

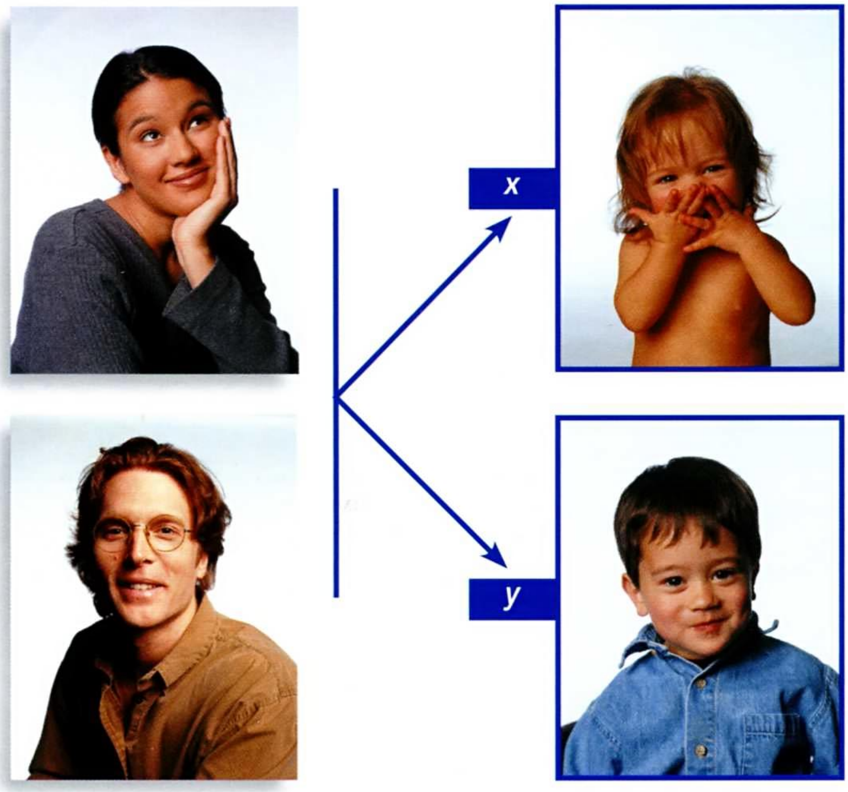
Головоломки

Китайские кольца «Ханойские башни», о которых мы рассказывали недавно, очень похожи на сегодняшнюю головоломку, в которой нужно продеть длинную петлю через несколько колец. Происхождение этой головоломки точно неизвестно, однако нет никаких сомнений в том, что она очень древняя. По китайской легенде, воин Хун Мин придумал эту игру для своей жены, чтобы ей было чем развлечься во время его отсутствия. По-видимому, ей настолько понравилась эта игрушка, что она забывала обо всем на свете.

Системы линейных уравнений позволяют выполнить «алгебраизацию» планиметрии — раздела геометрии, в котором рассматриваются прямые и плоскости. Важнейшую роль при решении систем линейных уравнений играют определители.

Системы уравнений и определители

Фундаментальные средства решения задач



▲ *Решить систему уравнений, описывающих возраст детей (x и y) в задаче, которая объясняется в тексте, можно методом подстановки, методом сложения или вычитания, а также графически.*

Представьте, что вам нужно решить такую задачу: «У семейной пары двое маленьких детей. В сумме детям 4 года, их разница в возрасте 2 года. Сколько лет каждому ребенку?». Эта задача очень проста и ее можно с легкостью решить в уме. Тем не менее, чтобы без проблем решать похожие, но более сложные задачи, будет лучше, если вы научитесь решать их с помощью уравнений.

Обозначим за x возраст младшего ребенка, за y — возраст старшего. Таким образом, $x + y = 4$, так как в сумме детям 4 года.

С другой стороны, так как разница в возрасте детей равна 2, имеем: $y - x = 2$. Мы получили систему уравнений. В нашем случае это система из двух уравнений с двумя неизвестными:

$$x - y = -2,$$
$$x + y = 4.$$

Один из многих способов решить эту систему уравнений таков. Выразим x из первого уравнения:

$$x = y - 2$$

и подставим результат во второе уравнение:

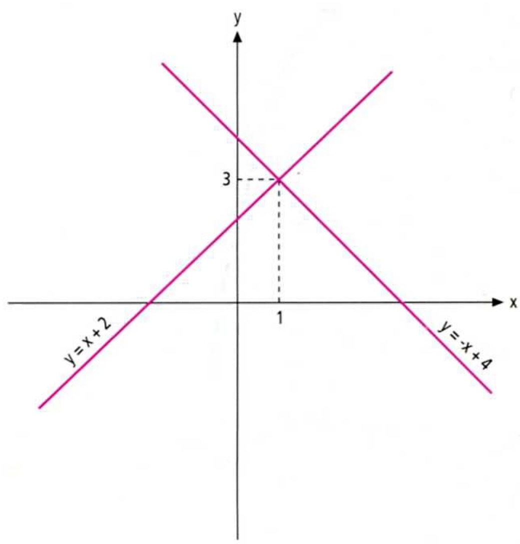
$$y - 2 + y = 4;\ 2y = 6;\ y = 6/2 = 3.$$

Подставим полученное значение y в первое уравнение и найдем значение x:

$$x - 3 = -2;\ x = -2 + 3 = 1.$$

Следовательно, младшему ребенку 1 год, старшему — 3 года. Для решения этой системы из двух уравнений с двумя неизвестными мы использовали метод, который называется методом подстановки.

Рассмотрим другую задачу, на этот раз геометрическую: «Найти координаты точки плоскости, в которой пересекаются прямые $y = x + 2$ и $y = -x + 4$». Эту задачу также можно решить «на глаз», проведя линии на миллиметровой бумаге и найдя точку их пересечения:



Точка пересечения прямых будет иметь координаты (1, 3). Если нам не удастся решить эту задачу графически (в большинстве случаев именно так и происходит), мы всегда сможем решить ее с помощью системы уравнений, которая будет состоять из уравнений этих двух прямых. В конечном итоге мы ищем точку плоскости с координатами (x, y) такую, что она принадлежит двум прямым одновременно. Следовательно, ее координаты одновременно удовлетворяют двум уравнениям:

$$x - y = -2,$$
$$x + y = 4.$$

Как видите, эту же систему уравнений мы решили в предыдущей задаче.

Системы линейных уравнений

Система уравнений представляет собой совокупность уравнений, то есть ряд равенств, в которых используются числа и буквы. Буквами обозначаются неизвестные, значение которых требуется найти. Существуют особые системы уравнений, которые называются системами линейных уравнений. Это уравнения, в которых все неизвестные имеют первую степень. Например, уравнения

$$3x^2 - y + z = 0,$$
$$x + 2y + 3z^3 = 8$$

нелинейны, а система

$$x + y + z = 2,$$
$$2x - y + 3z = 1$$

является системой линейных уравнений.

В общем случае система линейных уравнений может содержать произвольное число уравнений и неизвестных. В самом общем случае система линейных уравнений состоит из m уравнений с n неизвестными. В первой задаче мы получили систему уравнений

$$x - y = -2,$$
$$x + y = 4.$$

Это система из двух уравнений с двумя неизвестными. Чтобы решить ее, мы рассмотрели два варианта одной и той же задачи: арифметический и геометрический. Любую систему уравнений вне зависимости от формулировки исходной задачи всегда можно представить геометрически, с помощью прямых и плоскостей. Системы уравнений с двумя неизвестными описывают прямые на плоскости, системы с тремя неизвестными — плоскости в пространстве.

Как известно, $Ax + By + Cz = D$ — это уравнение плоскости, поэтому система вида

$$x + y + z = 2,$$
$$2x - y + 3z = 1$$

описывает две плоскости. Во многих случаях можно считать, что эта система задает уравнение линии пересечения двух плоскостей.

▲ *Линейное программирование, которое очень широко применяется в промышленности и других областях, позволяет определить, при каких значениях неизвестных значение данного многочлена будет максимальным или минимальным. Линейное программирование — один из важнейших примеров использования систем уравнений на практике.*

Классификация систем линейных уравнений

Система линейных уравнений не всегда имеет решение. Например, система

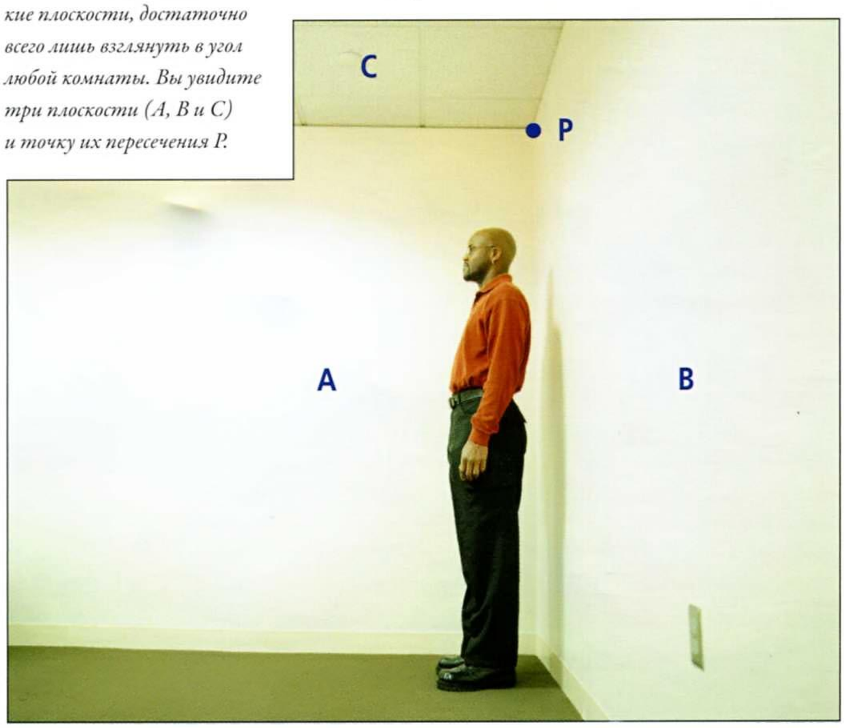
$$5x + 15y = 1,$$
$$2x + 6y = 8$$

не имеет решений. Если система линейных уравнений не имеет решений, она называется несовместной, в противном случае — совместной.

В аналитической геометрии совместные и несовместные системы очень легко различить, так как в общем случае они описывают относительное положение точек, прямых и плоскостей в пространстве. Уравнение с тремя неизвестными описывает плоскость, поэтому если система из двух уравнений с тремя неизвестными несовместная, это означает, что она описывает две непересекающиеся плоскости. Возможен и другой случай, например совместная система из трех линейных уравнений с тремя неизвестными. Она описывает три плоскости, которые пересекаются в одной точке.

Совместная система уравнений может иметь больше одного решения. Когда система имеет единственное решение, она называется определенной, в противном случае — неопределенной. Неопределенная система уравнений имеет бесконечно много решений. Совместная система линейных уравнений не может иметь 2, 35 или 5000 решений. Она может либо не иметь

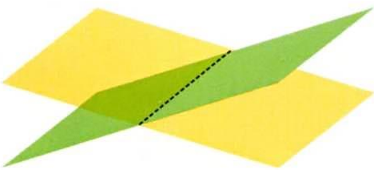
▼ *Многим сложно представить три плоскости, которые пересекаются в одной точке. Чтобы увидеть такие плоскости, достаточно всего лишь взглянуть в угол любой комнаты. Вы увидите три плоскости (A, B и C) и точку их пересечения P.*



решений вовсе, либо иметь одно или бесконечно много решений. Это очень просто показать геометрически. Как вы увидели, система из двух линейных уравнений с тремя неизвестными определяет относительное положение двух плоскостей в пространстве. Возможны три варианта их расположения.

Две плоскости параллельны, следовательно, они не имеют общих точек, а система уравнений не имеет решения. Эта система уравнений будет несовместной.

Две плоскости пересекаются по прямой. Все точки этой прямой будут решением системы уравнений. Эта система уравнений совместная. Тем не менее очевидно, что эта система уравнений имеет множество решений, то есть это неопределенная система. У такой системы уравнений столько решений, сколько точек содержит прямая, то есть бесконечно много.



Уравнения описывают одну и ту же плоскость (так, очевидно, что уравнения $x + y + z = 1$ и $2x + 2y + 2z = 2$ соответствуют одной плоскости). Эта система также будет совместной и неопределенной и имеет бесконечно много решений.

Однородные системы уравнений

Если правая часть всех уравнений системы линейных уравнений равна 0, такая система уравнений называется однородной. Так, например,

$$\begin{gathered}2x - y = 0,\\ 7x + 3y = 0\end{gathered}$$

— однородная система уравнений.

Такая система всегда будет совместной, так как ее решением всегда будут значения $x = 0$; $y = 0$. Такое решение называется тривиальным.

▼ *g = число кур, c = число кроликов.*

Однородная система уравнений называется совместной, если она имеет решения, отличные от тривиального.

Решение систем уравнений

Мы привели общие определения систем линейных уравнений, их классификацию и геометрический смысл, но ничего не сказали о том, как их можно решить. Систему уравнений из первой задачи о возрасте детей мы решили методом подстановки. Очевидно, что этот метод очень неудобен для решения системы, например, из 30 уравнений с 25 неизвестными. Существует множество других методов решения систем уравнений. Расскажем подробнее о том, как появились определители, занимающие важное место в истории алгебры.

Первые определители

Нет смысла пытаться решить сложную систему линейных уравнений, если заранее неизвестно, имеет она решения или нет. По этой причине было бы разумно найти какой-то алгебраический способ, который позволил бы определить, является ли система уравнений совместной. Вернемся к нашей первой задаче, в которой нужно было решить систему из двух уравнений с двумя неизвестными.

Рассмотрим наиболее общий случай — однородную систему из двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{gathered}ax + by = 0,\\ cx + dy = 0.\end{gathered}$$

Решим эту систему методом подстановки, как и в нашей первой задаче. Выразим x из первого уравнения

$$x = -\frac{b}{a}y$$

и подставим полученное выражение во второе уравнение:

$$-c\frac{b}{a}y + dy = 0\ ;\quad \left(-c\frac{b}{a} + d\right)y = 0,$$

или, что аналогично, $(ad - bc)\,y = 0$. Если выражение в скобках отлично от нуля, то y обязательно должен равняться нулю. Следовательно, в этом случае $x = 0$. Таким образом, необходимое условие совместности системы выглядит так: $ad - bc \neq 0$. Если мы применим это правило к системе

$$\begin{gathered}2x - y = 0,\\ 7x + 3y = 0,\end{gathered}$$

получим:

$$2 \cdot 3 - (-1) \cdot 7 = 6 + 7 = 13.$$

Система имеет решения, отличные от тривиального; следовательно, является совместной.

Рассмотрим систему из трех уравнений с тремя неизвестными в общем виде:

$$\begin{gathered} a_1x + a_2y + a_3z = 0, \\ b_1x + b_2y + b_3z = 0, \\ c_1x + c_2y + c_3z = 0. \end{gathered}$$

Выразив все неизвестные, мы придем к следующему выводу: чтобы система имела решение, должно выполняться условие:

$$a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + \\ + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 = 0.$$

Найденные нами два выражения в общем виде получили название определителей системы уравнений. Если записать коэффициенты уравнений системы в виде строк и столбцов, то мы выразим систему уравнений в матричной форме. Система

$$\begin{gathered} ax + by = 0, \\ cx + dy = 0 \end{gathered}$$

в матричной форме записывается так:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Система

$$\begin{gathered} a_1x + a_2y + a_3z = 0, \\ b_1x + b_2y + b_3z = 0, \\ c_1x + c_2y + c_3z = 0 \end{gathered}$$

в матричной форме будет выглядеть так:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, можно говорить об определителе матрицы.

▲ *Рассказывают, что британская королева Виктория, прочитав книгу «Алиса в стране чудес», попросила принести ей другие книги этого же автора, и получила труд об определителях.*

▲ *Преподобный Чарльз Лютвидж Доджсон (на фотографии Оскара Рейландера), более известный как писатель Льюис Кэрролл, был видным математиком, 29 лет преподавал в Оксфорде и занимался логикой.*

Определители

Определитель — это математический объект, вычисляемый для квадратной матрицы. В действительности определитель — это число, рассчитываемое для элементов матрицы по определенному правилу. Так, для данной квадратной матрицы A

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

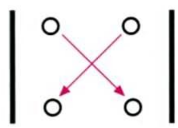
определитель рассчитывается так:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 6 = 8 - 18 = -10.$$

Чтобы найти это число, нужно следовать определенным правилам. Для матрицы 2 × 2, как в нашем примере, это правило очень простое:

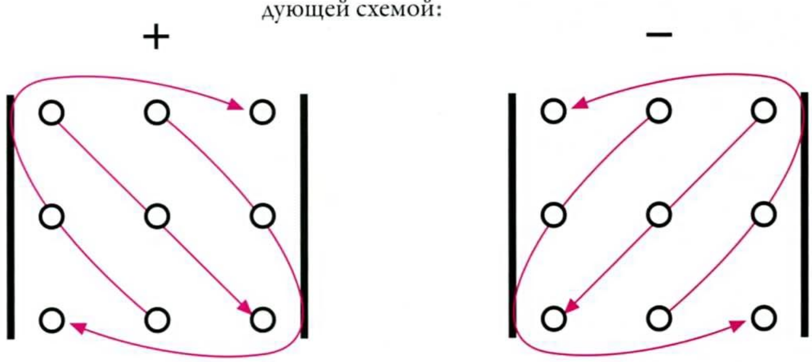
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}.$$

Нужно всего лишь найти разность произведений элементов на диагоналях матрицы.



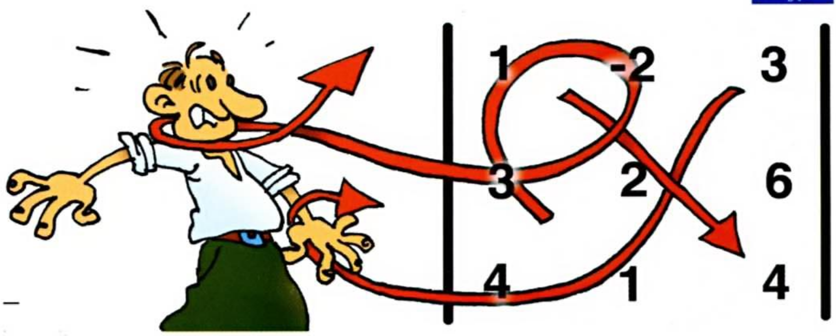
$$\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot 4 - 3 \cdot 6 = 20 - 18 = 2.$$

Для матрицы 3 × 3 нужно применить так называемое правило Сарруса, которое задается следующей схемой:



Стрелки на схеме указывают, произведение каких элементов матрицы нужно найти. Каждая из стрелок определяет одно слагаемое, которое представляет собой произведение трех элементов матрицы, соединенных стрелкой. Все слагаемые на первом рисунке учитываются со знаком «плюс», на втором — со знаком «минус». Пример:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = [1 \cdot 2 \cdot 4 + 1 \cdot 3 \cdot 3 + (-2) \cdot 6 \cdot 4] - [3 \cdot 2 \cdot 4 + 3 \cdot (-2) \cdot 4 + 6 \cdot 1 \cdot 1] = (8 + 9 - 48) - (24 - 24 + 6) = -31 - 6 = -37.$$



Определители матриц высшего порядка рассчитываются сложнее. Для этого используется теорема Лапласа, также известная как метод дополнительных миноров. По определению дополнительный минор — это определитель матрицы, полученной из исходной вычеркиванием строки и столбца, в которых находится рассматриваемый элемент. Например, в матрице

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & 5 & 0 \\ -1 & 7 & 1 & 9 \\ 3 & 2 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

дополнительный минор, соответствующий элементу, расположенному в строке 3, столбце 2, то есть числу 7, равен:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & 5 & 0 \\ -1 & 7 & 1 & 9 \\ 3 & 2 & 2 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 41.$$

Алгебраическое дополнение элемента a_{ij} определяется как произведение этого элемента на соответствующий дополнительный минор. Если обозначить это алгебраическое дополнение за A_{ij}, для вышеприведенной матрицы получим:

$$A_{32} = 7 \cdot (-41) = -287.$$

Как видим, в этом произведении появился знак «минус», однако значение определителя положительное. Это объясняется так называемым правилом знаков: первый элемент матрицы a_{11} берется со знаком +, затем знаки чередуются, пока мы не придем к элементу, для которого нужно вычислить алгебраическое дополнение. В нашем случае мы учитываем со знаком + первый элемент, который равен 2, затем чередуем знаки + и – для последующих элементов, пока не придем к номеру 7. Не имеет значения, каким путем мы придем к интересующему нас элементу, так как результат от этого не изменится.

▲ *Пьер-Симон Лаплас (1749–1827) был автором различных трудов о матрицах и определителях. В 1772 году он счел бесполезными методы, предложенные Крамером и Безу, и опубликовал статью, в которой рассмотрел орбиты планет и предложил метод решения систем линейных уравнений с помощью определителей.*

Разложение определителя

Чтобы рассчитать определитель с помощью алгебраических дополнений, нужно выбрать произвольную строку или столбец определителя и найти сумму всех алгебраических дополнений элементов этой строки или столбца, взятых с нужным знаком. Например, для приведенной выше матрицы разложение определителя по первой строке выглядит так:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 8 - 6 + 2\,(-12) + 3(-5) = 2 - 24 - 15 = -37.$$

Следовательно, с помощью разложения по строке или столбцу можно вычислить значение определителя любой матрицы. Чтобы вычислить определитель матрицы 4×4 по этому методу, потребуется найти четыре алгебраических дополнения, каждое из которых будет содержать определитель матрицы 3×3. Становится понятно, что вычисление определителей матриц бóльших порядков значительно сложнее. Существует две альтернативы этому методу. Первая и наиболее рекомендуемая — вычислить определитель с помощью одной из множества доступных компьютерных программ. Другая, более «математическая» — выполнить ряд преобразований так, чтобы в какой-либо из строк или столбцов определителя содержалось как можно больше нулей. В этом случае соответствующие алгебраические дополнения этих элементов также будут равны нулю. Посмотрите, например, как можно вычислить определитель следующей матрицы:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 7 & 1 & 9 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \cdot 5 = -15.$$

Допустимые преобразования при вычислении определителей
1. При умножении любой строки или столбца матрицы на число значение определителя умножается на это же число.
2. При перестановке двух строк или двух столбцов матрицы ее определитель меняет знак.
3. Значение определителя матрицы, две строки или два столбца которой равны между собой, равно 0.
4. Значение определителя матрицы, одна из строк или столбцов которой содержит только нули, равно нулю.
5. Если все элементы строки или столбца матрицы кратны одному и тому же числу, это число можно вынести за знак определителя.
6. Если элементы произвольной строки или столбца квадратной матрицы можно представить в виде суммы одинакового числа членов, то ее определитель будет равен сумме стольких определителей, сколько слагаемых содержит эта строка или столбец. Новые определители будут равны исходным, однако в столбце, в котором находятся слагаемые, будет записано первое слагаемое для первого определителя, второе слагаемое для второго определителя и так далее.
7. Если к элементам строки или столбца матрицы прибавить линейную комбинацию других строк или столбцов, значение определителя не изменится.

Последнее свойство из перечисленных в таблице выше представляет наибольший интерес, если мы хотим преобразовать матрицу так, чтобы она содержала как можно больше нулей. Рассмотрим простой пример, в котором нужно вычислить определитель:

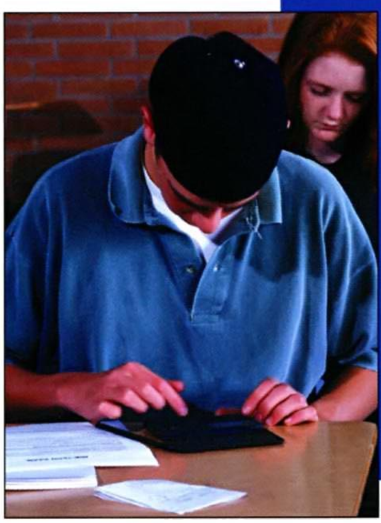
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

Мы выполнили следующие действия:
a) вычли 4-й столбец из 3-го;
b) вычли 4-ю строку из 1-й;
c) вычли 2-й столбец из 1-го.

Разложение определителя по первой строке будет выглядеть так:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot (3 \cdot 2 - 2 \cdot 2) = 2$$



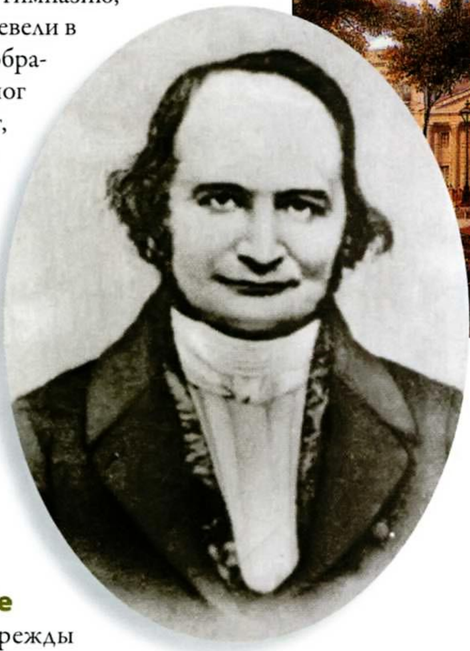
ЭТО ИНТЕРЕСНО

- Первое систематическое исследование систем линейных уравнений в современном виде провел Лейбниц. В 1693 году он создал так называемый метод нижних индексов для представления и решения простых систем уравнений. Тем не менее студенты младших курсов вузов, изучающие линейную алгебру, чаще слышат фамилию Крамера («правило Крамера»). В действительности Крамер в 1750 году опубликовал правило, которое изложил Колин Маклорен (справа) в своем «Трактате алгебры» в 1729 году. Это правило позволяло решать с помощью определителей системы линейных уравнений, содержащие до четырех переменных. Крамер также определил, какие знаки должны иметь члены разложения определителя. Позднее Безу систематизировал это правило, которое используется и сегодня. Первым, кто провел полное системное исследование определителей, был французский математик Александр Теофил Вандермонд (1735–1796). Он сформулировал правило, позволяющее вычислять определители с помощью дополнительных миноров.

- Несмотря на то, что в школах и университетах сначала рассказывается о матрицах, а затем об определителях, эти понятия были введены в обратном порядке. Необходимые условия совместности систем линейных уравнений подразумевают определенные отношения между их коэффициентами. На основе этих отношений было введено понятие определителя. Позднее эти коэффициенты стали записываться в виде строк и столбцов; так появились матрицы. Затем и матрицы, и определители начали использоваться не только для решения уравнений и превратились в фундаментальные элементы математического анализа.

Универсальный математик
Карл Густав Якоб Якоби

Карл Густав Якоб Якоби родился в Потсдаме 10 декабря 1804 года. Он был вторым сыном преуспевающего еврея-банкира. Первые уроки ему дал дядя, несомненно, прекрасный преподаватель: когда в 12 лет Якоби поступил в Потсдамскую гимназию, уже через полгода его перевели в следующий класс. Таким образом, уже в 14 лет Якоби мог поступить в университет, но по закону в немецкие университеты не принимались абитуриенты младше 16 лет.



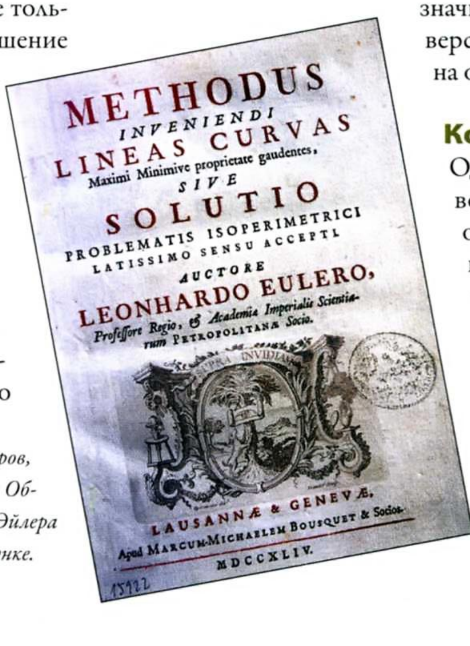
▸ *Карл Густав Якоб Якоби сформулировал и расширил понятие определителя, заложил основы теории эллиптических функций, а также создал важные труды по химии и дифференциальным уравнениям.*

▴ *В 1825 году Якоби получил степень доктора в Берлинском университете и спустя некоторое время занял должность преподавателя в Кёнигсберге. На иллюстрации изображены Бранденбургские ворота в начале XIX века.*

Самоучка поневоле

Якоби пришлось четырежды пройти один и тот же курс, однако он не только не утратил мотивацию, но и начал усиленно заниматься самостоятельно, что определило его будущее как ученого. Он принялся за изучение трудов Эйлера и Гаусса и направил все свои творческие способности, которые только начинали зарождаться, на численное решение уравнений пятой степени. Читатель может подумать, что Якоби был необыкновенно одаренным и обладал врожденными способностями к математике. Тем не менее сам он не раз признавался, что ему ничего не давалось просто, а все открытия он совершил благодаря упорному труду.

В 1824 году он получил диплом, дававший ему право преподавать в средней школе, на следующий год — степень доктора Берлинского университета. Якоби было предложено несколько преподавательских должностей на выбор. Его докторская диссертация, ставшая передовой для того времени, была посвящена разложению алгебраических дробей. Кроме того, в ней излагался оригинальный метод преобразования рядов. В 1825 году Якоби уже преподавал. В первый год работы он впервые в истории прочел курс дифференциальной геометрии. Вступление Якоби в должность преподавателя стало значимым событием в истории немецких университетов, так как оказало прямое влияние на общую структуру образования.


METHODUS
INVENIENDI
LINEAS CURVAS
Maximi Minimive proprietate gaudentes,
SIVE
SOLUTIO
PROBLEMATIS ISOPERIMETRICI
LATISSIMO SENSU ACCEPTI
AUCTORE
LEONHARDO EULERO,
Professore Regio, & Academiæ Imperialis Scientiarum Petropolitanæ Socio.
LAUSANNÆ & GENEVÆ,
Apud Marcum-Michaelem Bousquet & Socios.
MDCCXLIV.

▸ *Якоби не мог поступить в университет ввиду юного возраста, что дало ему возможность подробно изучить работы многих авторов, в частности Эйлера. Обложка одной из книг Эйлера представлена на рисунке.*

Конфликтная личность

Одаренного математика в короткий срок возненавидели многие. Якоби обладал острым умом и столь же острым языком и не стеснялся в оценках, если кто-то или что-то ему не нравилось. Тем не менее было бы несправедливо не отметить, что он был вежлив, отличался непоколебимыми моральными принципами и с теплотой относился к тем, кого любил. Двумя его лучшими друзьями были два знаменитых астронома: Фридрих Вильгельм Бессель, с которым Якоби познакомился в 1826 году, когда получил должность преподавателя в Кёнигсберге, и Петер Андреас Ганзен, с которым Якоби поддерживал тесные отношения до конца жизни. Якоби провел в Кёнигсберге 18 лет. В сентябре 1831 года он женился на Мари Швинк. У них родилось пятеро сыновей и три дочери. Брак был счастливым, и Якоби, несмотря на занятость, уделял семье все возможное время. К сожалению, из-за переутомления, а также из-за обострения диабета в 1843 году, Якоби уже не мог работать столь продуктивно, как раньше. Болезнь вкупе с семейным кризисом, вызванным расстройством дел в семье родителей, окончательно подорвала силы ученого.

▲ *Немецкий астроном Фридрих Вильгельм Бессель (1784–1846), портрет которого изображен на этой памятной марке, был одним из двух близких друзей Якоби.*

▶ *В городе в Восточной Пруссии, который до начала Второй мировой войны назывался Кёнигсберг (ныне Калининград), Якоби работал длительное время и обзавелся семьей.*

Авангардный математик

Среди трудов Якоби, охватывающих почти все разделы математики, следует выделить важные работы по теории чисел, а также продолжение работ Эйлера, посвященных задаче трех тел. Однако наиболее выдающиеся результаты Якоби связаны с эллиптическими функциями. Они во многом совпали с результатами шведского математика Абеля, однако были получены совершенно независимо от него. Другим математическим «хитом» Якоби стало систематическое изучение определителей. В 1841 году он опубликовал объемную статью под названием «О функциональных детерминантах». В ней Якоби сформулировал знаменитую теорему, связывавшую непрерывные и дифференцируемые функции нескольких переменных с помощью определителей функций, которые теперь называются якобианами.

▼ *Целью Мартовской революции (на иллюстрации изображена баррикада на Кёнигштрассе 19 марта 1848) было свержение прусской монархии и установление республики.*

Печальный финал

Последние годы жизни Якоби были отмечены чередой несчастий, что в значительной степени стало следствием противоречивых политических взглядов ученого. Весной 1848 года в Германии произошла Мартовская революция, которая имела для Якоби трагические последствия: он не скрывал своей симпатии республиканским идеям, но был противником всеобщего избирательного права. Видя эту противоречивость политических взглядов, король Пруссии лишил Якоби пенсии, которую пожаловал ему восемью годами ранее. Якоби пришлось переехать с семьей в Готу, где стоимость жизни была ниже. В Готе жил один из его лучших друзей, известный астроном Петер Андреас Ганзен. В следующем году с помощью Гумбольдта Якоби удалось получить должность в Берлинском университете. Семья, к которой Якоби был очень привязан, могла навещать его только по выходным. 11 февраля 1851 года Якоби заболел оспой и семь дней спустя умер в одиночестве. Жена не смогла прибыть вовремя, чтобы провести с ним последние мгновения его жизни.

ЭТО ИНТЕРЕСНО

- Старший брат Якоби, Мориц Герман фон Якоби (1801–1874), портрет которого вы можете видеть на памятной медали справа, был выдающимся физиком и инженером. Примерно в 1837 году он эмигрировал в Россию и стал известен как первооткрыватель гальванопластики.

- Существует версия, подкрепленная фактами, согласно которой виновником политических неудач Якоби был его личный врач: чтобы излечить Якоби от депрессии, в которую тот впал от переутомления, он порекомендовал ему уделять больше внимания политике «для укрепления нервной системы». Этот совет оказался явно неудачным.

Картография — это наука, сочетающая в себе оптику, геологию, астрономию и в особенности математику. На примере создания карт можно в очередной раз убедиться в практической ценности этой науки.

Составление карт

Как изобразить криволинейную поверхность на плоскости

Если бы земля была плоской, то труд картографов был бы намного проще. К счастью, Земля является «локально» плоской, и составить карты небольших участков земной поверхности несложно. Поэтому неудивительно, что все великие цивилизации, расширяя границы, уделяли особое внимание развитию географии. Глава Александрийской библиотеки Эратосфен Киренский (273–194 гг. до н. э.), который считается одним из первых великих географов в истории, первым вычислил расстояния между крупными городами. Он же впервые вычислил размеры земли и определил, что длина дуги меридиана, соответствующей одному градусу, равна 100 километрам. Этот результат очень близок к истинному — 111 километров. Определить положение точки с помощью двух координат, широты и долготы, стало возможным благодаря методу, разработанному Гиппархом, который также считается создателем ортографической проекции. Первую проекцию сферы на плоскость, нашедшую применение на практике при составлении планов и карт, создал Птолемей. Это так называемая стереографическая проекция (см. врезку).

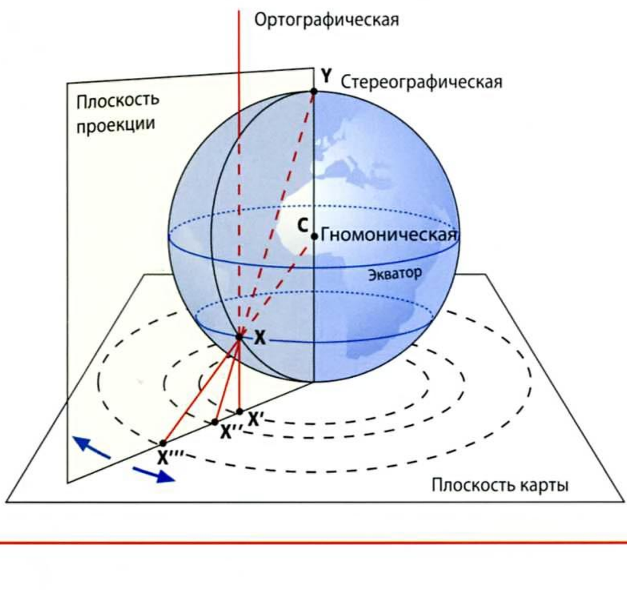
▼ *Картина мира, изображенная Птолемеем (ок. 85 — ок. 165 гг. н. э.) в трактате «География», оставалась неизменной на протяжении 14 веков, так как никому не удавалось создать более точную карту. Птолемей вычислил широту и долготу более чем 8000 точек земного шара.*

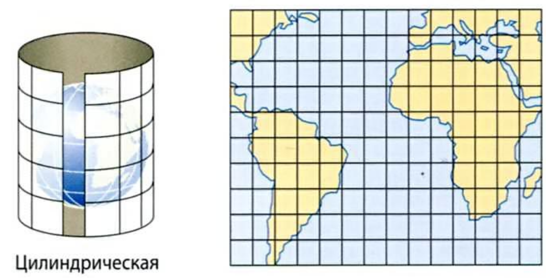
Карты Птолемея

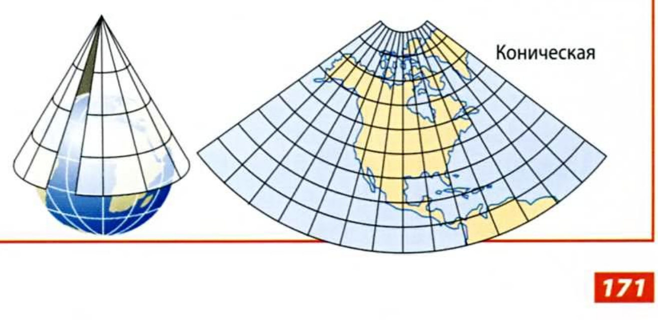
Существует простой способ превратить земной шар в бесконечную плоскость. Допустим, что мы взяли сферическую модель земли и положили ее на стол. Если мы хотим определить, в какой точке стола будет располагаться конкретный город, нужно соединить Северный полюс и нужный нам город прямой линией. Точка, в которой эта прямая пересечет плоскость стола, определит положение города на карте. Аналогичное построение можно провести для всех точек мира и установить тем самым однозначное соответствие между земным шаром и плоскостью. Если немного подумать, то станет понятно, что проекция такого типа (сохраняющая углы) не сохраняет

Проекция мира

Составление карт — это проецирование точек земного шара на плоскую поверхность — плоскость карты. Ниже представлены три классические проекции. Простейшая из них — ортографическая, или параллельная проекция. В ней каждой точке земного шара X соответствует ее тень X'. В гномонической проекции отображением точки X является точка X''', при этом центр проекции совпадает с центром Земли C. В стереографической проекции отображением точки X является точка X'', центр проекции совпадает с полюсом Y. Это первая проекция, позволяющая составить карты, полезные с картографической точки зрения.

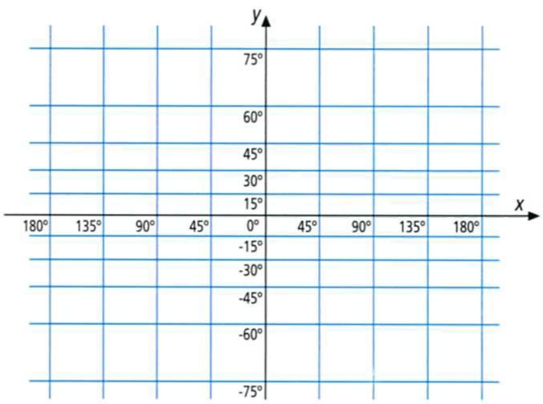






расстояния. Все города, расположенные в южном полушарии, находятся на разумном расстоянии друг от друга. Однако в северном полушарии расстояния между точками сферы увеличиваются до бесконечности. Отрезок длиной несколько метров, расположенный вблизи Северного полюса, на плоскости будет изображаться отрезком длиной в несколько миллионов километров. Тем не менее эта проекция имеет несколько преимуществ: она сохраняет направления до всех точек, если смотреть из центра карты. Эта проекция также сохраняет углы на локальном уровне. Меридианы и параллели изображаются перпендикулярными прямыми, и, хотя эта проекция не сохраняет площади, круги сферы отображаются в виде кругов на плоскости карты. Восемь томов «Географии» Птолемея много веков служили универсальным руководством по картографии.

▲ Слева направо: Меркатор и его друг Йодокус Хондиус — картографы и создатели прекрасных глобусов Земли. Они поставили свои знания на службу науке и коммерции, сделав картографию движителем экономического роста.



◄ Слева — схема расположения меридианов и параллелей в проекции Меркатора. Меридианы равноудалены друг от друга, расстояние между параллелями возрастает с увеличением широты.

Меркатор

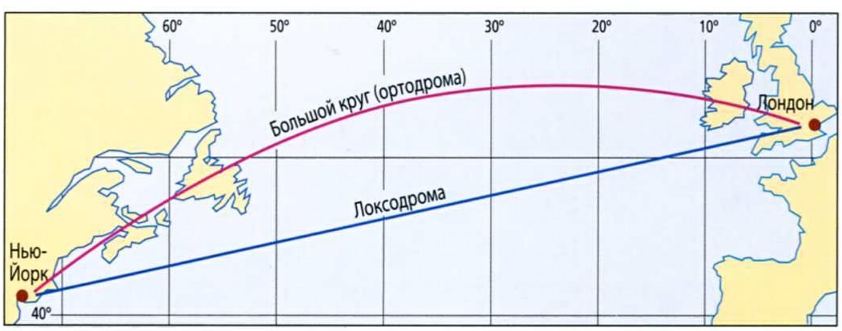
На поверхности сферы, в частности на поверхности земного шара, угол определяет долготу на меридиане. Так как меридиан — это большой круг, высота, на которой производится измерение, не имеет значения: длина дуги меридиана на сфере всегда будет неизменной. Если же расположить рассматриваемый угол на экваторе и постепенно увеличивать широту, то мы увидим, что по мере приближения к полюсу расстояние на земной поверхности будет уменьшаться. Это несоответствие устранил Герард Кремер (1512–1594), более известный как Герард Меркатор, который считается отцом современной картографии. Для этого он разработал проекцию, носящую его имя. На карте, выполненной в проекции Меркатора, меридианы и параллели изображаются прямыми линиями, но если меридианы (линии постоянной долготы) равноудалены друг от друга, то параллели (линии постоянной широты) удаляются друг от друга с увеличением широты, то есть по мере приближения к полюсам. Эта проекция обладает огромными преимуществами для использования при навигации, так как линии постоянного румба, которые пересекают меридианы под постоянным углом (эти линии называются локсодромами), изображаются прямыми линиями. Проекция Меркатора не сохраняет расстояния и площади. Это нетрудно заметить, увидев большие искажения вблизи полюсов. Тем не менее, эта проекция сохраняет не только направления, но и углы между ними, что очень важно в навигации.

ЭТО ИНТЕРЕСНО

- Эскимосы изготавливают карты на тюленьих шкурах. Они обозначают озера, острова и течения разными цветами. Эти карты не сохраняют реальные расстояния и кажутся сильно искаженными. Причина в том, что расстояние между точками на этих картах зависит не от реального расстояния между ними, а от времени в пути.
- Меркатор первым использовал слово «атлас» для обозначения собрания карт. Первое издание «Атласа» Меркатора — Хондиуса увидело свет в 1606 году, а к 1640 году выдержало 30 изданий.

- Карты аборигенов Полинезии изготавливаются из тростника и пальмовых листьев. Небольшие ракушки, закрепленные на карте, обозначают острова, а тонкие стебли тростника — морские течения. Руководствуясь этими простейшими картами, полинезийцы проплывали огромные расстояния в Тихом океане.

▼ На карте в проекции Меркатора прямая линия обозначает линию постоянного румба (такие линии называются локсодромами), однако она не указывает кратчайший путь между двумя точками; кратчайшее расстояние проходит вдоль дуги большого круга земного шара (ортодромы).



Лучшее от Генри Э. Дьюдени

Задачи с лоскутами

1. Два креста из одного

Разделите греческий крест на пять частей и составьте из них два греческих креста одного размера. Эта головоломка имеет очень красивое решение.

2. Крест и треугольник

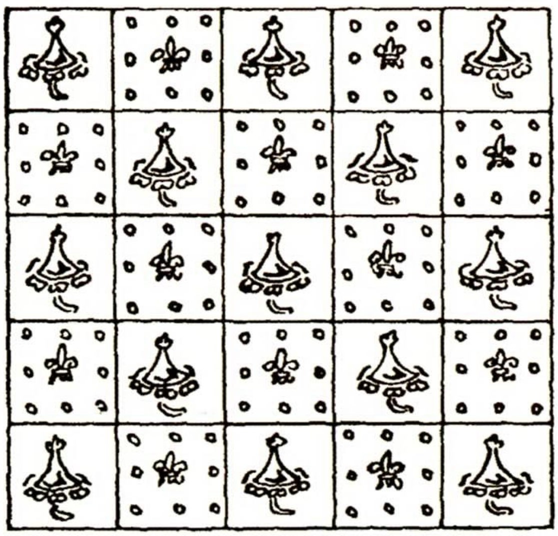
Разделите греческий крест на шесть частей и составьте из них равносторонний треугольник. Эта головоломка сложна, и найти ее решение практически невозможно, если вам неизвестен способ, позволяющий превратить равносторонний треугольник в квадрат.

3. Сложенный крест

Вырежьте греческий крест из бумаги и сложите его так, чтобы всего одним разрезом ножниц его можно было бы разделить на четыре части, образующие квадрат.

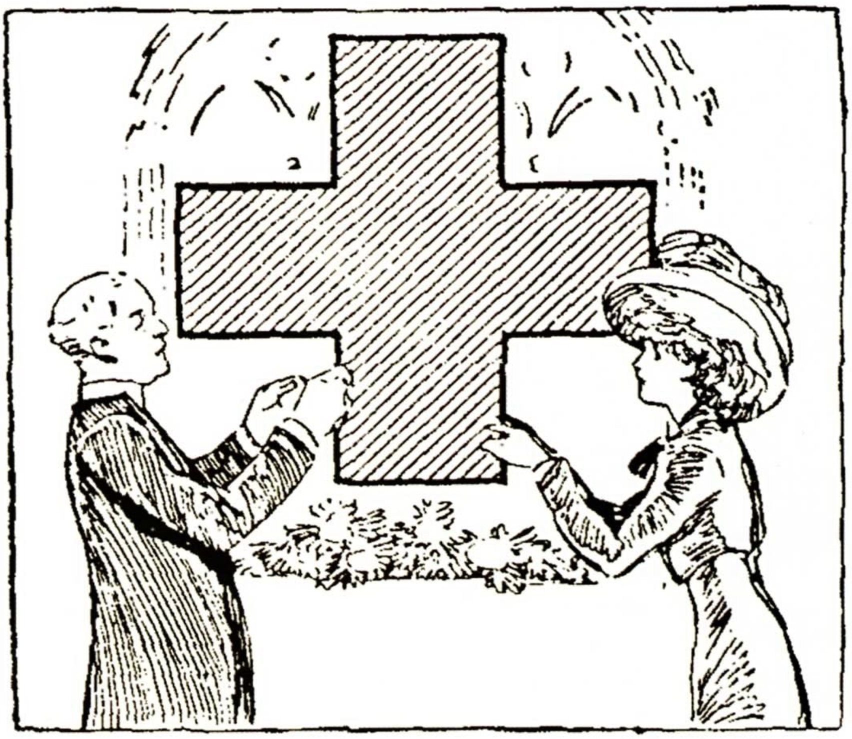
4. Одеяла

На рисунке изображен квадратный отрез ткани. Некая дама захотела разрезать его на четыре части так, чтобы из двух кусков получилось одеяло в форме идеального квадрата, а из двух оставшихся — еще одно квадратное одеяло. Как решить задачу? Разумеется, ткань можно разрезать только вдоль линий, делящих ее на 25 маленьких квадратов, при этом узор не должен нарушаться. Эта головоломка имеет всего одно решение. Сможете найти его?



5. Квадратные отрезы ткани

Как-то раз, будучи в гостях у одной дамы, я взял со стола два прекрасных квадратных отреза расшитой золотом ткани. Оба отреза имели одинаковый

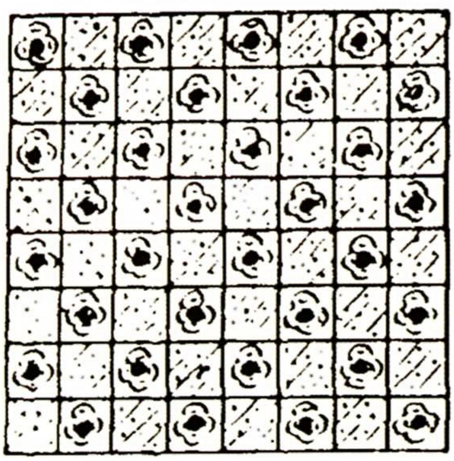


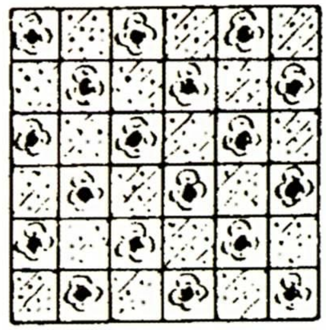
▲ *Греческий крест состоит из пяти квадратов равного размера.*

узор — рисунок тонкой работы мастеров Востока, напоминавший шахматную доску.

— Разве они не прекрасны? — спросила меня подруга. — Их мне привезла кузина, которая недавно вернулась из Индии. Теперь мне нужна твоя помощь. Как видишь, я решила сшить их вместе, чтобы получилась квадратная шаль. Как это сделать так, чтобы отходов было как можно меньше? Разумеется, разрезать ткань можно только вдоль линий, которые делят ее на маленькие квадраты.

Я разрезал два квадратных отреза ткани на четыре части, из которых затем составил один большой квадрат так, чтобы не нарушить узор. Когда я закончил работу, то заметил, что обе части имели одинаковую площадь, то есть содержали одинаковое число квадратов. Сможете показать, как нужно разрезать ткань в соответствии с этими условиями?





Решения

1. Один крест нужно вырезать полностью (на рис. 1 он обозначен буквой A). Части, обозначенные буквами B, C, D и E, образуют второй крест, как показано на рис. 2. Этот крест будет иметь в точности тот же размер, что и первый. Предлагаем читателю определить оптимальное направление разрезов самостоятельно.

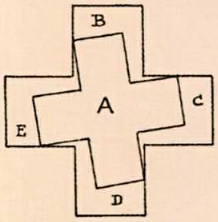


Рис. 1

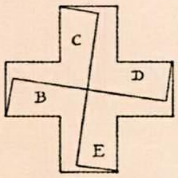
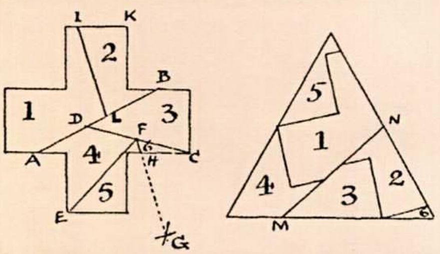


Рис. 2

Задам вам один сложный вопрос: как составить три греческих креста из одного так, чтобы число фрагментов было наименьшим? Эту задачу можно решить, разрезав исходный крест всего на 13 частей. Я уверен, что многие из моих читателей, сведущие в геометрии, с радостью примутся за решение этой задачи, которое я не буду приводить здесь и оставлю загадку без ответа.

2. Линия AB на рисунке обозначает сторону квадрата той же площади, что и крест. В одном из прошлых выпусков я показал, как построить квадрат и равносторонний треугольник одинаковой площади. Таким образом, я не буду останавливаться на том, какие размеры должен иметь треугольник, по площади равный исходному кресту. Будем считать эту задачу рассмотренной. Возникает вопрос: как разрезать одну из этих фигур на части так, чтобы из них можно было составить другую?



Сначала проведем линию AB, где A и B — середины боковых сторон. Далее проведем линии DC и EF. Их длина в два раза меньше, чем длина стороны треугольника. Теперь проведем дуги одного радиуса с центрами в точках E и F. Эти дуги пересекутся в точке G. Затем проведем отрезок FG. Наконец, построим отрезок IK, равный HC, и LB, равный AD, проведем линию IL, параллельную FG, и тем самым определим форму шести частей. Из этих частей можно составить равносторонний треугольник, как показано на следующем рисунке. Другой вариант — сначала построить линию MN в нашем треугольнике, затем отметить середину стороны треугольника, в которой сходятся части под номерами 4 и 5 в вершине креста E, и повернуть треугольник вокруг этой точки так, чтобы линия MN была параллельна AB. Затем можно нарисовать часть 5, скопировав ее форму с креста, а после этого — все остальные части. Я видел множество попыток решения, в которых предполагается, что треугольник имеет ту же высоту, что и крест. Это не так: крест всегда будет выше, чем треугольник той же площади.

3. Сначала согните крест вдоль линии AB, отмеченной пунктиром на рис. 1. Полученная фигура изображена на рис. 2.

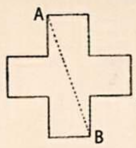


Рис. 1

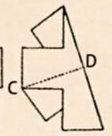


Рис. 2

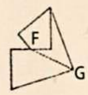


Рис. 3

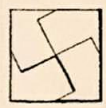
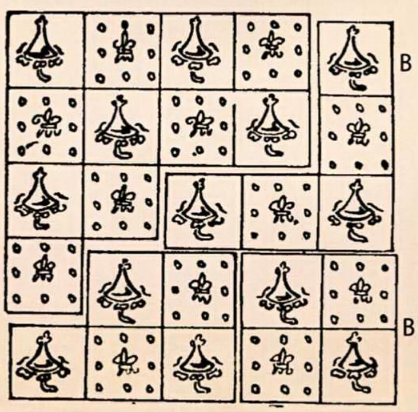


Рис. 4

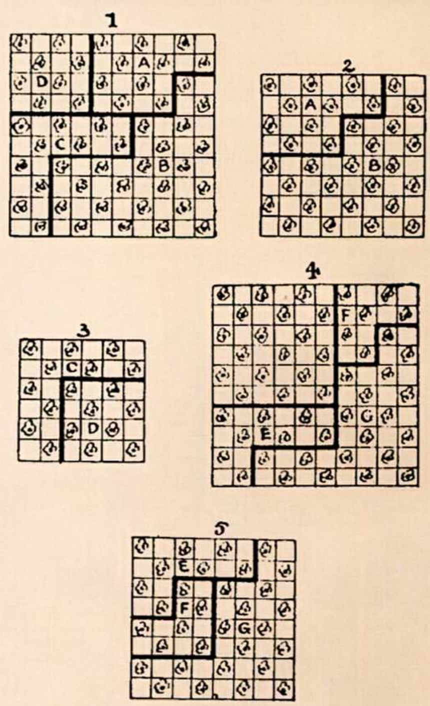
Далее согните лист вдоль пунктирной линии CD (где D — центр креста) и получите фигуру, изображенную на рис. 3. Теперь возьмите в руки ножницы и разрежьте лист вдоль линии GF. В результате лист будет разделен на четыре части одинаковой формы и размера. Из них можно составить квадрат, как показано на рис. 4.

4. Два отреза ткани, обозначенные буквой A, образуют идеальный квадрат; два других отреза, обозначенные буквой B, — второй квадрат (см. предыдущий рисунок).



5. Насколько мне известно на данный момент, эта задача имеет всего одно решение, которое полностью удовлетворяет условию. Ткань нужно разрезать так, как показано на рисунке 1. На рисунках 2 и 3 показано, как следует разрезать два исходных квадрата. Вы видите, что части A и C состоят из 20 «клеток», следовательно, их площадь одинакова.

На рисунке 4 (из частей неправильной формы, изображенных на этом рисунке, можно составить второй квадрат, изображенный на рис. 5) представлено решение задачи, в котором, однако, нарушается одно условие: «Я разрезал два квадратных отреза ткани желаемым образом». В этом случае меньший квадрат остается нетронутым. Несмотря на это, я предлагаю этот рисунок читателю как иллюстрацию особенностей задачи.



В задачах такого типа повернуть любую из частей на четверть оборота нельзя, так как в этом случае нарушится узор. Тем не менее, как в случае F на рисунке 4, можно повернуть асимметричную часть на пол-оборота, то есть расположить ее «вверх ногами». Возможность поворота на четверть оборота или пол-оборота в этих задачах зависит от узора на ткани, используемого материала и формы исходного отреза.

Многие головоломки имеют схожие черты, однако обнаружить их непросто. К примеру, «Ханойские башни», о которых мы рассказали недавно, очень похожи на головоломку из этого выпуска, в которой нужно продеть длинную петлю через несколько колец.

Петля дьявола
Китайские кольца

Происхождение этой головоломки точно неизвестно, однако нет никаких сомнений в том, что она очень древняя. По китайской легенде, воин Хун Мин (181–234) придумал эту игру для своей жены, чтобы ей было чем развлечься во время его отсутствия. По-видимому, ей настолько понравилась эта головоломка, что она забывала обо всем на свете. С другой стороны, Чун-Ен Юй в своей «Книге о хитроумных головоломках с кольцами», опубликованной в Шанхае в 1958 году, пишет, что эта головоломка была очень популярна во времена династии Сун (960–1279). Тем не менее до сих пор не найдены исторические документы подтверждающие какую-либо из этих гипотез.

Головоломка в Европе

Древнейшее упоминание об этой головоломке в Европе содержится в рукописи «О возможностях чисел» (De Viribus Quantitatis) Луки Пачоли, датируемой примерно 1500 годом. Тем не менее до недавнего времени считалось, что эта головоломка впервые упоминается в труде «О тонкости вещей» (De Subtilitate) Джероламо Кардано. Позднее математики подробно изучили эту головоломку (например, Джон Валлис в 1685 году). Наконец, в 1872 году была опубликована книга французского исследователя Луи Гроса, в которой подробно объяснялась связь этой головоломки и двоичной арифметики, а также впервые в истории был описан код Грея, который сегодня применяется повсеместно.

▲ *Цель этой древней головоломки сложнее, чем может показаться. Чтобы достичь ее, потребуется немало сосредоточенности и терпения, так как минимальное число действий, необходимое для решения головоломки, удваивается с добавлением каждого кольца.*

▼ *Портрет Луки Пачоли с незнакомцем. Авторство картины приписывается Якопо де Барбари. В трудах этого математика-францисканца содержится одно из первых в Европе упоминаний о нашей головоломке.*

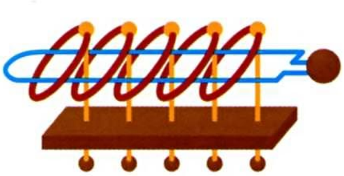
Головоломка со множеством имен

В книге Чун-Ен Юя рассказывается о «Головоломке с девятью кольцами», так как в традиционном варианте эта головоломка содержит именно столько колец. Также в Китае в начале XX века эта головоломка называлась «Лиен нуань чуань», что означает «кольцо сплетенных колец». В Европе эту головоломку называли «багенодье». Это французское слово обозначает человека, который любит бесцельно тратить время, например, гуляя по улицам и смотря по сторонам. Возможно, это название указывает, что для решения головоломки требуется немалое время. Она также известна как «Петля дьявола»: может показаться, что снять все кольца с петли в этой головоломке не смог бы и сам дьявол. Кроме того, ее называют «Головоломка с кольцами Кардано», так как Джероламо Кардано упоминает ее в своем труде «О тонкости вещей» (De Subtilitate). Наконец, она известна как «Головоломка с китайскими кольцами».

Эта головоломка также очень популярна в Скандинавии, где использовались висячие замки похожей формы. Она была известна в Норвегии в течение нескольких веков, а в национальном музее Финляндии она представлена среди традиционных народных игрушек.

Суть головоломки

Головоломка состоит из пяти столбиков, содержащих отверстия, в которые продеты кольца. Каждое кольцо надето на следующий столбик. Все столбики продеты через основание головоломки; на одном из концов каждого столбика закреплен шар, который не позволяет извлечь столбик через отверстие в основании. Наконец, головоломка также содержит вытянутую металлическую петлю, по форме напоминающую прямоугольник, закругленный на одном конце и продетый в деревянный шар с другого конца. Далее мы будем обозначать кольца буквами A, B, C, D и E, начиная слева, так как левое кольцо — самое свободное из всех и не продето ни в один столб. Петля продевается в кольца справа налево. Каждое кольцо может быть надето на петлю или снято с нее. Цель головоломки — снять все кольца с петли вне зависимости от их исходного положения. Особенно выделяются два положения: в первом на петлю надеты все кольца, во втором, напротив, всего одно кольцо — ближайшее к шару, которым оканчивается петля.



Исходные положения

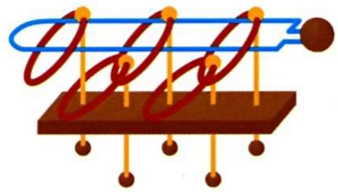
Каждое кольцо может быть расположено относительно петли двумя способами, поэтому для обозначения возможных расположений удобно использовать двоичную систему счисления.

Положение 0: в этом положении кольцо не надето на петлю и располагается выше или ниже него. Где именно располагается кольцо (выше или ниже петли), не имеет особого значения, так как эти положения взаимозаменяемы.

Положение 1: в этом положении кольцо надето на петлю.

Существует и третье положение, в котором кольцо также надето на петлю, однако оно не является важным при решении головоломки, поэтому не имеет своего обозначения.

Для описания положений колец и петли будем использовать двоичную систему счисления. Так, например, последовательность 10101 будет обозначать следующее положение:

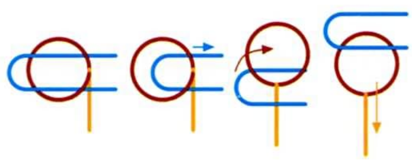


В этом положении на петлю надеты кольца A, C и E (первое, третье и пятое справа), остальные кольца свободны.

Как решить головоломку

Чтобы перейти от исходного положения к конечному, нужно выполнить определенную последовательность действий, на каждом из которых меняется положение одного кольца. Заметим, что существует всего два вида возможных действий.

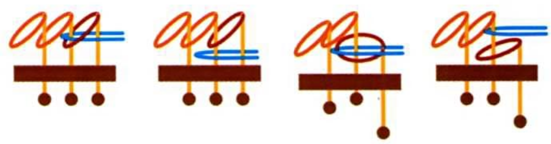
1. Кольцо A надевается на петлю или снимается с нее. Это действие можно выполнить в любой момент.



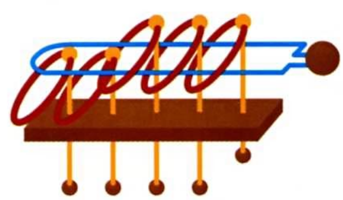
2. Одно из остальных колец надевается на петлю или снимается с нее. Чтобы выполнить это действие, например, для кольца X, нужно, чтобы кольцо, расположенное слева от X, было надето на петлю, а остальные кольца слева от него были бы свободны. Иными словами, положение колец должно описываться следующим образом:

1 X... или 0 0...0 1 X...,

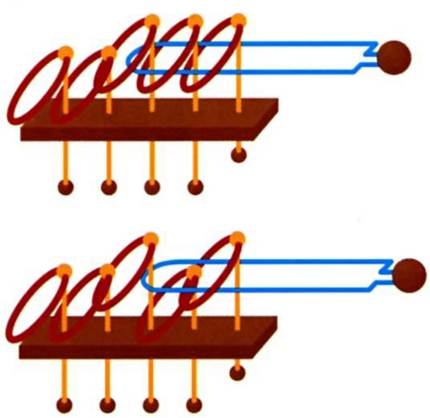
где X обозначает положение кольца X (0 или 1).



К примеру, в следующем положении



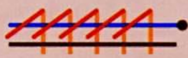
можно снять с петли кольцо D, которое обозначено за X, так как оно расположено справа от кольца C, надетого на петлю, а все остальные кольца слева от него сняты с петли. Чтобы снять кольцо с петли, нужно сместить конец петли к столбику слева от кольца D и повернуть кольцо вниз, продев его через петлю.

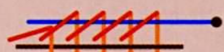


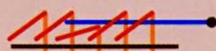
Разумеется, чтобы надеть кольцо на петлю, нужно выполнить эти же действия, но в обратном порядке.

Решение головоломки для исходного положения 11111

Допустим, что элементы головоломки находятся в положении 11111.
Какие действия нужно выполнить, чтобы решить головоломку?

0. Начальное положение 11111. 

1. Положение 01111. Снять кольцо A с петли. 

2. Положение 01011. Снять кольцо C. 

3. Положение 11011. Надеть кольцо A на петлю. 

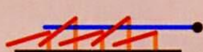
4. Положение 10011. Снять кольцо B. 

5. Положение 00011. Снять кольцо A. 

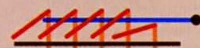
6. Положение 00010. Окончательно снять с петли пятое кольцо E. Теперь осталось освободить остальные четыре. 

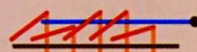
7. Положение 10010. Надеть кольцо A на петлю. 

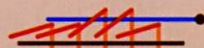
8. Положение 11010. Вновь надеть кольцо B на петлю. 

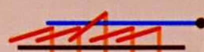
9. Положение 01010. Снять кольцо A. 

10. Положение 01110. Надеть кольцо C на петлю. 

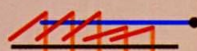
11. Положение 11110. Вновь надеть кольцо A на петлю. Это положение аналогично исходному, однако пятое кольцо E снято с петли. 

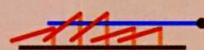
12. Положение 10110. Снять кольцо B. 

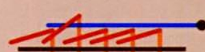
13. Положение 00110. Снять кольцо A. 

14. Положение 00100. Снять четвертое кольцо D с петли. 

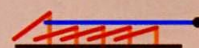
15. Положение 10100. Надеть кольцо A на петлю. 

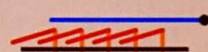
16. Положение 11100. Надеть кольцо B на петлю. Это положение аналогично исходному, однако кольца D и E сняты с петли. 

17. Положение 01100. Снять кольцо A. 

18. Положение 01000. Снять с петли третье кольцо C. 

19. Положение 11000. Надеть кольцо A на петлю. 

20. Положение 10000. Снять кольцо B. 

21. Положение 00000. 

Головоломка решена!

Аналогично можно вычислить, что число действий, необходимых для решения головоломки из положения 00001, равно 31.

Формулы для вычисления числа шагов

Головоломку «Китайские кольца» можно упростить, убрав одно или несколько колец, или усложнить, добавив новые кольца. Чем больше колец в головоломке, тем больше действий потребуется для ее решения. Сколько шагов необходимо, чтобы решить головоломку из девяти колец, находящихся в положении 111111111?

Чтобы ответить на этот вопрос, достаточно внимательно посмотреть представленные выше решения. В самом деле, головоломка из трех колец в положении 001 эквивалентна головоломке из пяти колец в положении 00100. В обоих случаях для решения головоломки потребуется 7 шагов, так как кольца, расположенные справа от 1 и снятые с петли, никак не влияют на решение. Аналогично, головоломка из четырех колец в положении 1111 эквивалентна головоломке из пяти колец в положении 11110. В обоих случаях для решения головоломки потребуется 10 шагов. Эта ситуация напоминает головоломку «Ханойские башни».

По результатам этих рассуждений можно составить следующую таблицу:

Число колец	Исходное положение	Число шагов	Формула
1	1	1	$1 = 2^1 - 1$
2	01	3	$3 = 2^2 - 1$
3	001	7	$7 = 2^3 - 1$
4	0001	15	$15 = 2^4 - 1$
5	00001	31	$31 = 2^5 - 1$
6	000001	63	$63 = 2^6 - 1$
7	00000001	127	$127 = 2^7 - 1$
8	000000001	255	$255 = 2^8 - 1$
9	0000000001	511	$511 = 2^9 - 1$

Удивительное соотношение

Последовательность положений, ведущих к решению головоломки «Китайские кольца», обладает удивительным свойством: она связана с последовательностью чисел, записанных в двоичной системе счисления.

Допустим, дана последовательность нулей и единиц, к примеру 11010.

С одной стороны, на основе этой последовательности можно составить число в десятичной системе счисления по следующей схеме:

$$11010 = 1 \cdot 24 + 1 \cdot 23 + 0 \cdot 22 + 1 \cdot 21 + 0 \cdot 20 = 26.$$

Десятичное число	Двоичное число	Код Грея	Положение элементов головоломки
0	00000	00000	00000
1	00001	00001	10000
2	00010	00011	11000
3	00011	00010	01000
4	00100	00110	01100
5	00101	00111	11100
6	00110	00101	10100
7	00111	00100	00100
8	01000	01100	00110
9	01001	01101	10110
10	01010	01111	11110
11	01011	01110	01110
12	01100	01010	01010
13	01101	01011	11010
14	01110	01001	10010
15	01111	01000	00010
16	10000	11000	00011
17	10001	11001	10011
18	10010	11011	11011
19	10011	11010	01011
20	10100	11110	01111
21	10101	11111	11111

С другой стороны, можно составить другую последовательность нулей и единиц по следующим правилам (читать цифры нужно слева направо):

Правило № 1: Преобразованная цепочка начинается с той же цифры, что и исходная.

Правило № 2: Далее, если первая и вторая цифры исходной цепочки одинаковы, второй цифрой преобразованной цепочки будет 0, если же эти цифры отличаются — 1.

Аналогичные преобразования повторяются для всех цифр. Если n-я и $(n + 1)$-я цифры исходной цепочки равны, то $(n + 1)$-я цифра преобразованной цепочки будет равна 0, в противном случае — 1.

Это преобразование называется кодом Грея и применяется множеством способов в различных областях науки.

К примеру, преобразованием последовательности 11010 по коду Грея будет последовательность 10111.

Выбрав в качестве исходных последовательностей натуральные числа, записанные в двоичной системе счисления, и применив преобразования согласно коду Грея, получим список положений (в обратном порядке), который укажет решение головоломки!

Следовательно, чтобы решить головоломку с n кольцами в исходном положении 000...01, то есть головоломку, в которой петля продета только в правое кольцо, потребуется $2n - 1$ шагов. Число шагов, необходимое для решения головоломки, начиная с положения 1, 11, 111 и так далее, рассчитывается по несколько более сложной формуле.

Число колец	Исходное положение	Число шагов	Формула
1	1	1	$1 = 2^0 = \frac{1}{3} \cdot (2^2 - 1)$
2	11	2	$2 = 2^1 = \frac{1}{3} \cdot (2^3 - 2)$
3	111	5	$5 = 2^0 + 2^2 = \frac{1}{3} \cdot (2^4 - 1)$
4	1111	10	$10 = 2^1 + 2^3 = \frac{1}{3} \cdot (2^5 - 2)$
5	11111	21	$21 = 2^0 + 2^2 + 2^4 = \frac{1}{3} \cdot (2^6 - 1)$
6	111111	42	$42 = 2^1 + 2^3 + 2^5 = \frac{1}{3} \cdot (2^7 - 2)$
7	1111111	85	$85 = 2^0 + 2^2 + 2^4 + 2^6 = \frac{1}{3} \cdot (2^8 - 1)$


18
17
3
11
8
7
19
9
6
5
4
16
14
1
2
12
15
10
13

DeAGOSTINI ПРЕДСТАВЛЯЕТ

Пропустили выпуск любимой коллекции?

Просто закажите его на сайте www.deagostini.ru

Для вашего удобства рекомендуем приобретать выпуски в одном и том же киоске и заранее сообщать продавцу о вашем желании покупать следующие выпуски коллекции

Для украинских читателей:
заказ возможен на сайте www.deagostini.ua или по телефону горячей линии 0-800-500-8-40

В следующем выпуске через 2 недели

Куб-змейка

Математический анализ
Пределы и непрерывность

Автор основной теоремы анализа
Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс

Математика и космонавтика
Космические путешествия

Лучшее от Сэма Лойда
О сыре и узлах

16+ *Спрашивайте в киосках!*